13/3/2017

Μαθημα 4º

Τοπολογια

Θυμαμαι...

Σφαιρικη περιοχη:

$B(a,r) = \{x \in E : \rho(x,a) < r\}$

Περιοχη

U περιοχη του $a \in U \iff (\exists r > 0)\ B(a,r) \subseteq U = U(a)$

Ορισμος: Ενα σημειο το λεω εσωτερικο ενος συνολου αν $(\exists r>0)\ B(a,r) \subset A$ ($a \in A$, A ειναι περιοχη του a)

$\boxed{a \text{ εσωτερικο του } A \iff (\exists r>0) : B(a,r) \subseteq A}$

Συμβολισμος: A° = συνολο των εσωτερικων σημειων του A

↳ Εσωτερικό ή πυρηνας.

(*) $A^{\circ} \subseteq A$

Ορισμος: Ενα σημειο a θα λεγεται σημειο επαφης του συνολου A αν και μονο αν ισχυει:

$(\forall r>0)\ B(a,r) \cap A \neq \emptyset$

$\boxed{a \text{ σημειο επαφης του } A \iff (\forall r>0)\ B(a,r) \cap A \neq \emptyset}$

Συμβολισμος: $\bar{A}$ = συνολο σημειων επαφης

↳ Θηκη ή καλυμμα

$\circledast$ $a \in A$, $\underbrace{B(a,r) \cap A}_{\neq \emptyset} \ni a$

Παρατηρηση:

- Ενα σημειο του συνολου ειναι και σημειο επαφης ($A \subseteq \bar{A}$)
- $A^0 \subseteq A \subseteq \bar{A}$

Προταση

1. $a \in A^0 \iff (\exists\, U(a)) : U(a) \subseteq A$: Εσωτερικο αν.ν ισχυει αυτο
2. $a \in \bar{A} \iff (\forall\, U(a)) : U(a) \cap A \neq \emptyset$: Σημειο επαφης αν.ν ισχυει αυτο

Αποδειξη

1. ($\Rightarrow$) Εστω $a \in A^0$, τοτε απο τον ορισμο ισχυει οτι $B(a,r) \subseteq A$. Αρα θετοντας $B(a,r) = U(a)$ εχω το ζητουμενο

($\Leftarrow$) Εστω $(\exists\, U(a)) : U(a) \subseteq A$. Τοτε $(\exists\, r>0) : B(a,r) \subseteq U(a)$ οποτε επειδη $U(a) \subseteq A$ παιρνουμε $B(a,r) \subseteq A$, δηλαδη $a \in A^0$

2. ($\Rightarrow$) Εστω $a \in \bar{A}$ και $U(a)$ τυχαια περιοχη του a. Τοτε θα υπαρχει $r>0$ ωστε $B(a,r) \subseteq U(a) \xrightarrow{a \in \bar{A}} B(a,r) \cap A \neq \emptyset$ $\xrightarrow{B(a,r) \cap A \subseteq U(a) \cap A} U(a) \cap A \neq \emptyset$

($\Leftarrow$) Εχω το ζητουμενο αν θεσω $U(a) = B(a,r)$

....

Πρόταση

Για τυχόντα υποσύνολα A, B ενός μ.χ. ισχύουν τα εξής:

i) $A^o \subseteq A$ i') $A \subseteq \bar{A}$

ii) $A \subseteq B \Rightarrow A^o \subseteq B^o$ ii') $A \subseteq B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}$

iii) $(A^o)^c = \overline{A^c}$ iii') $(\bar{A})^c = (A^c)^o$

Απόδειξη

$\boxed{\text{!} \quad A^{oo} = (A^o)^o \quad , \quad \bar{\bar{A}} = (\bar{\bar{A}})}$ → Για την διπλή πρόταση

ii) Έστω $A \subseteq B$ ΘΔΟ $A^o \subseteq B^o$

Έστω $x \in A^o \Leftrightarrow (\exists r>0)\ B(x,r) \subseteq A \xRightarrow{A \subseteq B} (\exists r>0)\ B(x,r) \subseteq B$

$\Rightarrow x \in B^o$

ii') Έστω $A \subseteq B$ ΘΔΟ $\bar{A} \subseteq \bar{B}$

Έστω $x \in \bar{A} \Leftrightarrow (\forall U(x))\ U(x) \cap A \neq \emptyset \xrightarrow{A \subseteq B \Rightarrow U(x) \cap A \subseteq U(x) \cap B}$

$(\forall U(x))\ U(x) \cap B \neq \emptyset \Rightarrow x \in \bar{B}$

iii) Έστω x τυχόν, $x \in (A^o)^c \Leftrightarrow x \notin A^o \Leftrightarrow \sim[x \in A^o]$

$\Leftrightarrow \sim[(\exists r>0)\ B(x,r) \subseteq A] \Leftrightarrow (\forall r>0)\ B(x,r) \nsubseteq A$

$\Leftrightarrow (\forall r>0)\ B(x,r) \cap A^c \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in \overline{A^c}$

iii') Έστω x τυχόν, $x \in (\bar{A})^c \Leftrightarrow x \notin \bar{A} \Leftrightarrow \sim[x \in \bar{A}] \Leftrightarrow$

$\sim[(\forall U(x))\ U(x) \cap A \neq \emptyset] \Leftrightarrow (\exists U(x))\ U(x) \cap A = \emptyset \Leftrightarrow$

$(\exists U(x))\ U(x) \subseteq A^c \Leftrightarrow x \in (A^c)^o$

Πρόταση

Για τυχόντα υποσύνολα A, B ενός μ.χ ισχύουν τα εξής:

i) $A^{\circ\circ} = A$ i') $\bar{\bar{A}} = A$

ii) $(A\cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ ii') $\overline{A\cup B} = \bar{A}\cup\bar{B}$

Απόδειξη

i) Ισχύει $A^{\circ\circ} = (A^\circ)^\circ \subseteq A^\circ$. Άρα αρκεί νδο $A^\circ \subseteq A^{\circ\circ}$

a τυχόν στοιχείο του $A^\circ \Rightarrow (\exists r>0)\ B(a,r) \subseteq A^{\circ\,(*)}$. Θα δείξουμε τότε

ότι $\underbrace{B(a,r) \subseteq A^\circ}_{?} \Rightarrow a \in A^{\circ\circ}$ } είναι μια ξεχωριστή άσκηση και έτσι θα την δούμε

Έστω x τυχόν σημείο, $x \in B(a,r) \xrightarrow[\text{κάθε σημείου της}]{B(a,r)\text{ περιοχή}}$ Η $B(a,r)$ είναι

περιοχή του x $\xrightarrow[\substack{B(a,r)=U(x)\\ \text{και από }(*)}]{\text{θέτουμε}}$ $U(x) \subseteq A \Rightarrow x \in A^\circ$

(άρα ισχύει το ?)

i') Ισχύει $\bar{A} \subseteq \overline{(\bar{A})} = \bar{\bar{A}}$. Αρκεί νδο $\bar{\bar{A}} \subseteq \bar{A}$

Έστω x τυχόν, $x \in \bar{\bar{A}} \Rightarrow (\forall r>0)\ B(x,r)\cap\bar{A} \neq \emptyset$. Θεωρούμε

$y \in B(x,r)\cap\bar{A}$, δηλαδή $y \in B(x,r)$ και $y \in \bar{A} \xrightarrow{B(x,r)=U(y)}$

$U(y)\cap A \neq \emptyset \Rightarrow B(x,r)\cap A \neq \emptyset \Rightarrow B(x,r)\cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in \bar{A}$

ii) $A\cap B \subseteq A$, $A\cap B \subseteq B \Rightarrow (A\cap B)^\circ \subseteq A^\circ$, $(A\cap B)^\circ \subseteq B^\circ \Rightarrow$

$(A\cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ$

Αρκεί ν.δ.ο $A^\circ\cap B^\circ \subseteq (A\cap B)^\circ$

$x \in A^\circ\cap B^\circ \Leftrightarrow x\in A^\circ \wedge x \in B^\circ \Rightarrow [(\exists U(x))\ U(x)\subseteq A] \wedge [(\exists V(x))\ V(x)\subseteq B]$

$\xrightarrow[W(x)\subseteq U(x),\ W(x)\subseteq V(x)]{W(x)=U(x)\cap V(x)}$ $W(x) \subseteq A\cap B \Rightarrow x \in (A\cap B)^\circ$

ii') $A \subseteq A\cup B$, $B \subseteq A \cup B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \overline{A\cup B}$, $\bar{B} \subseteq \overline{A\cup B} \Rightarrow \bar{A}\cup\bar{B} \subseteq \overline{A\cup B}$

Αρκεί νδο $\overline{A\cup B} \subseteq \bar{A}\cup\bar{B}$ (**)

Εστω οτι δεν ισχυει το (**). Αρα υπαρχει x:

$x \in \overline{A\cup B}$ και $x \notin \bar{A}\cup\bar{B}$

Αρα λοιπον $x \notin \bar{A}\cup\bar{B} \Leftrightarrow x \notin \bar{A} \wedge x \notin \bar{B} \Rightarrow$

$(\exists U(x))\ U(x)\cap A = \emptyset \ \wedge\ (\exists V(x))\ V(x)\cap B = \emptyset \xrightarrow[W(x)\subseteq U(x),\ W(x)\subseteq V(x)]{W(x) = U(x)\cap V(x)}$

$\Rightarrow W(x)\cap A = \emptyset \ \wedge\ W(x)\cap B = \emptyset \Rightarrow$

$W(x)\cap \underbrace{(A\cup B)} = \emptyset$ ατοπο

Δεν μας πειραζει αν ειχα και τομη αλλα δεν μας εξυπηρετουσε

(*) $\overline{\bigcup_{i=1}^{\kappa} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\kappa} \bar{A}_i$

$(\bigcap_{i=1}^{\kappa} A_i)^{\circ} = \bigcap_{i=1}^{\kappa} A_i^{\circ}$

Προταση

1. $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^{\circ} \supseteq \bigcup_{i\in I} A_i^{\circ}$ 1'. $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} \supseteq \bigcup_{i\in I} \bar{A}_i$

2. $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^{\circ} \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i^{\circ}$ 2'. $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} \subseteq \bigcap_{i\in I} \bar{A}_i$

Αποδειξη

2,2') Εστω $j\in I$, $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_j$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\bigcap_{i\in I} A_i)^{\circ} \subseteq A_j^{\circ} \\ \overline{\bigcap_{i\in I} A_i} \subseteq \bar{A}_j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\bigcap_{i\in I} A_i)^{\circ} \subseteq \bigcap_{j\in I} A_j^{\circ} \\ \overline{\bigcap_{i\in I} A_i} \subseteq \bigcap_{j\in I} \bar{A}_j \end{cases}$$

Νικολιδάκης

$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^\circ \supseteq \bigcup_{i\in I} A_i^\circ$ δεν ισχύει σαν ισότητα

$(A\cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$

$\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \bigcap_{k=1}^{n} A_k^\circ$

$\exists (E,\rho)$, $A,B \subseteq E$

$(A\cup B)^\circ \supsetneq A^\circ \cup B^\circ$

$A^\circ \subseteq A \subseteq \bar{A}$

$(E,\rho) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$

$A = (1,2]$, $B = (2,3)$

$\Downarrow$

$A^\circ = (1,2)$

$A^\circ = \{x \in A : \exists B(x,r) \subseteq A\}$

$\bar{A} = \{y \in E : \forall r>0 \; B(y,r)\cap A \neq \emptyset\}$

$\bar{A} = [1,2]$

$B^\circ = (2,3) = B$, $\bar{B} = [2,3]$

$A^\circ \cup B^\circ = (1,2)\cup(2,3) = (1,3) - \{2\}$ $\Big\}$ οπότε χάνεται η

$(A\cup B)^\circ = (1,3)$ ισότητα

$\overline{A\cap B} \subsetneq \bar{A}\cap\bar{B}$: Άσκηση πάνω στο προηγούμενο

με $A=(1,2)$, $B=(2,3)$ {Να το δείξω}

παράδειγμα

$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^\circ \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i^\circ$, $B_1 = \left(\bigcap_{\nu=1}^{\infty} A_\nu\right) \subsetneq \bigcap_{\nu=1}^{\infty} A_\nu^\circ = B_2$

$(A\cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $A_\nu = \left(-\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right)$, $A_\nu^\circ = \left(-\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right)$

$B_2 = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right) = \{0\}$

$B_1 = \{0\}$

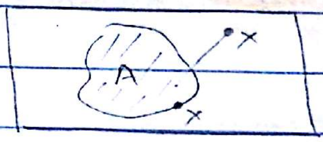
$\{\underset{0}{\bullet}\}$ $A = \{0\}$

Ασκηση 1

O (E,ρ) μ.χ συνολο $A \neq \emptyset$ και $A \subseteq E$ και $x \in E$

τοτε $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \rho(x, A) = 0$

Λυση



$x \in \bar{A} \iff \forall r > 0 \quad B(x,r) \cap A \neq \emptyset \iff$

$(\forall r>0)(\exists y_r \in A$ και $\rho(x, y_r) < r) \iff$

[ορισμος) $\rho(x, A) = \inf\{\rho(x,a) : a \in A\}$] παρενθεση

$\rho(x,A) < r \quad (\forall r>0) \iff \rho(x,A) = 0$

Ασκηση 2

(E,ρ) μ.χ , A φραγμενο και $A \subseteq E$ και $A \neq \emptyset$

τοτε $\delta(\bar{A}) = \delta(A) < +\infty$

Λυση

[Ορισμος $\delta(A) = \sup\{\rho(x,y) : x, y \in A\}$] παρενθεση

$\delta(\bar{A}) = \sup\{\underbrace{\rho(x', y')}_{\in \mathbb{R}^+, \geq 0} : x', y' \in \bar{A}\}$

$A \subseteq \bar{A}$ αρα προφανη το οτι $\delta(A) \leq \delta(\bar{A})$

Θα δειξω οτι $\delta(\bar{A}) \leq \delta(A)$

Αν δειξω οτι $\forall x', y' \in \bar{A}$

$\rho(x', y') \leq \delta(A) \quad \forall x' \in \bar{A}, y' \in \bar{A}$

$x' \in \bar{A}$, σταθεροποιω ενα $\varepsilon>0$

$B(x',\varepsilon)\cap A \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, x\in A : \rho(x,x')<\varepsilon$

$y'\in\bar{A} \Rightarrow \exists\, y\in A \quad \rho(y,y')<\varepsilon$

$\rho(x',y') \le \rho(x',x)+\rho(x,y)+\rho(y,y') \le \varepsilon+\varepsilon+\rho(x,y)$

$\Rightarrow \rho(x',y') \le 2\varepsilon+\delta(A)$

$\forall\, x',y'\in\bar{A} \Rightarrow \delta(\bar{A})\le 2\varepsilon+\delta(A) \quad (\forall\, \varepsilon>0) \Rightarrow$

$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\delta(\bar{A})=\delta(\bar{A})\le\lim_{\varepsilon\to 0^+}(\delta(A)+3\varepsilon)=\delta(A)$

Ασκηση 3

(E,ρ) μ.χ με $A\neq\emptyset$, $A\subseteq E$, $x\in E$ τοτε $\rho(x,\bar{A})=\rho(x,A)$

Λυση

Υποσυνολο

$\rho(x,A)=\inf\{\rho(x,a) : a\in A\}$ "υι"

$\rho(x,\bar{A})=\inf\{\rho(x,b) : b\in\bar{A}\}$

" ... ( ) $\Rightarrow \rho(x,\bar{A})\le\rho(x,A)$